Ecuaciones exponenciales

La incógnita se encuentra en el exponente.

Pasos para resolver las ecuaciones exponenciales

1º Descomponemos las ecuaciones exponenciales aplicando las **propiedades de las potencias.**

Si nos encontramos con una suma de exponentes, escribimos el producto $\Rightarrow$ $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

Si nos aparece una resta de exponentes, escribimos el cociente $\Rightarrow$ $a^{b-c} = a^b : a^c$

Si nos aparece un producto en el exponente, usamos potencia de potencia $\Rightarrow$ $a^{b \cdot c} = \left(a^b\right)^c$

2º Las resolvemos aplicando las siguientes propiedades

Si tienen la misma base: igualamos los exponentes $\Rightarrow$ $a^b = a^c \rightarrow b = c$

Si tienen el mismo exponente: igualamos las bases $\Rightarrow$ $a^b = c^b \rightarrow a = c$

Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones de primer grado

1. $2^{x+1} = 8$

Descomponemos en factores para conseguir la misma base. $2^{x+1} = 2^3$

Igualamos los exponentes y resolvemos. $x + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

2. $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

Aplicamos las propiedades de las potencias, para descomponer.

$$\frac{2^x}{2} + 2^x + 2^x \cdot 2 = 7$$

Sustituimos 2^x por la variable t y resolvemos la ecuación $\Rightarrow 2^x = t$

$$\frac{t}{2} + t + 2t = 7 \quad \Rightarrow \quad t + 2t + 4t = 14 \quad \Rightarrow \quad 7t = 14 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Calculamos el valor de x $\Rightarrow$ $2^x = t$ $\Rightarrow$ $2^x = 2$ $\Rightarrow x = 1$

3. $3^x + 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$

Aplicamos las propiedades de las potencias para descomponer.

$$3^x + \frac{3^x}{3} + 3^x \cdot 3 = 117$$

Sustituimos 3^x por la variable t y resolvemos la ecuación $\Rightarrow$ $3^x = t$

$$t + \frac{t}{3} + 3t = 117 \quad \Rightarrow \quad 13t = 351 \quad \Rightarrow t = 27$$

Calculamos el valor de x $\Rightarrow$ $3^x = 3^3$ $\Rightarrow x = 3$

Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones de segundo grado.

1. $2^{x+3}+4^{x+1}-320=0$

Aplicamos las propiedades de las potencias

$2^x\cdot 2^3+\left(2^2\right)^{x+1}-320=0 \;\Rightarrow 2^x\cdot 2^3+\left(2^x\right)^2\cdot 2^2-320=0$

Sustituimos $2^x=t \;\Rightarrow\; 8t+4t^2-320=0 \;\;\Rightarrow 4t^2+8t-320=0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado para obtener los valores de t.

$t^2+2t-80=0\Rightarrow\begin{cases} t_1=8 \\ t_2=-10 \quad\rightarrow\quad \text{no tiene solución.}\end{cases}$

Calculamos x

$2^x=t \;\rightarrow\; 2^x=8 \;\rightarrow\; 2^x=2^3 \;\rightarrow x=3$

2. $5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$

$\left(5^x\right)^2-6\cdot 5^x+5=0 \;\Rightarrow$

$5^x=t \;\Rightarrow\; t^2-6t+5=0 \;\Rightarrow\begin{cases} t_1=5 \;\Rightarrow 5^x=5 \;\Rightarrow x=1 \\ t_2=1 \;\Rightarrow 5^x=1 \;\Rightarrow x=0\end{cases}$

Ecuaciones logarítmicas

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$\log_a N + \log_a M = \log_a N \cdot M$

$\log_a N - \log_a M = \log_a N/M$

$m \cdot \log_a N = \log_a N^m$

Relación $\log A = \log B \Leftrightarrow A = B$

Ejemplos

a) $\log x + \log 20 = 3$

El logaritmo de la suma se transforma en producto.

$\log x + \log 20 = 3 \quad \Rightarrow \quad \log 20 \cdot x = 3$

Para tener logaritmo en ambos lados de la ecuación, calculamos que logaritmo da de solución 3. Para ello hacemos SHIFT log 3 = 1000.

$\log 20 \cdot x = \log 1000$

Aplicamos la relación $\log A = \log B \Leftrightarrow A = B$ y resolvemos.

$\log 20 \cdot x = \log 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 20x = 1000$

$20x = 1000 \Rightarrow x = 50$

Solución: $x = 50$

b) $\log x^3 = \log 6 + 2\log x$

$$\log x^3 = \log 6 + \log x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \log x^3 = \log 6x^2 \quad \Leftrightarrow x^3 = 6x^2 \quad \Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2(x-6) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ no es solución de la ecuación logarítmica. No existe } \log 0. \\ x_2 = 6 \text{ es solución.} \end{cases}$$

Solución: $x = 6$

c) $2\log x = \log(10 - 3x)$

$$2\log x = \log(10-3x) \Leftrightarrow \log x^2 = \log(10-3x) \quad \Rightarrow x^2 = 10 - 3x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Comprobamos si las soluciones tienen sentido, sustituyendo en la ecuación logarítmica.

$x_1 = 2 \quad \Rightarrow 2\log 2 = \log(10 - 3\cdot 2) \quad \Rightarrow 2\log 2 = \log 4 \quad \Rightarrow 2\log 2 = 2\log 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ es solución

$x_2 = -5 \quad \Rightarrow 2\log(-5)$. El $\log(-5)$ no tiene sentido. $\Rightarrow \quad x = -5$ no es solución.

Solución: $x = 2$

d) $\log 4 + 2\log(x-3) = \log x$

$$\log\left[4\cdot(x-3)^2\right] = \log x \Leftrightarrow 4\cdot\left(x^2 - 6x + 9\right) = x$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\text{Comprobamos} \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow \log 4 + 2\log 1 = \log 4 \quad \Rightarrow x = 4 \text{ es solución.} \\ x_2 = \dfrac{9}{4} \rightarrow \log 4 + 2\log\underbrace{\left(\dfrac{9}{4} - 3\right)}_{\text{negativo}} = \log\dfrac{9}{4} \quad \Rightarrow x = \dfrac{9}{4} \text{ no es solución} \end{cases}$$

Solución: $x = 4$