FÍSICA

2º BACHILLERATO

CÁLCULO VECTORIAL

En física se trabaja con dos tipos de magnitudes:

- Las **magnitudes escalares**, que son aquellas que quedan determinadas por un número que expresa su medida y una unidad de medida. Por ejemplo, la masa, el tiempo o la energía.
- Las **magnitudes vectoriales**, cuya determinación precisa, además de su medida, una dirección y un sentido, es decir, vectores, junto a una unidad de medida. Por ejemplo, la fuerza o la velocidad.

Un **vector** $\vec{v}$ es un segmento orientado, definido mediante un módulo, una dirección, un sentido y un origen.

- **Módulo.** Es la longitud o medida del vector, y se representa por $|\vec{v}|$ o $\boldsymbol{v}$.
- **Dirección.** Viene dada por la recta directriz sobre la que se apoya el vector.
- **Sentido.** Se indica mediante una flecha, de entre los dos posibles sobre la dirección.
- **Origen.** Es el punto del que parte el vector.

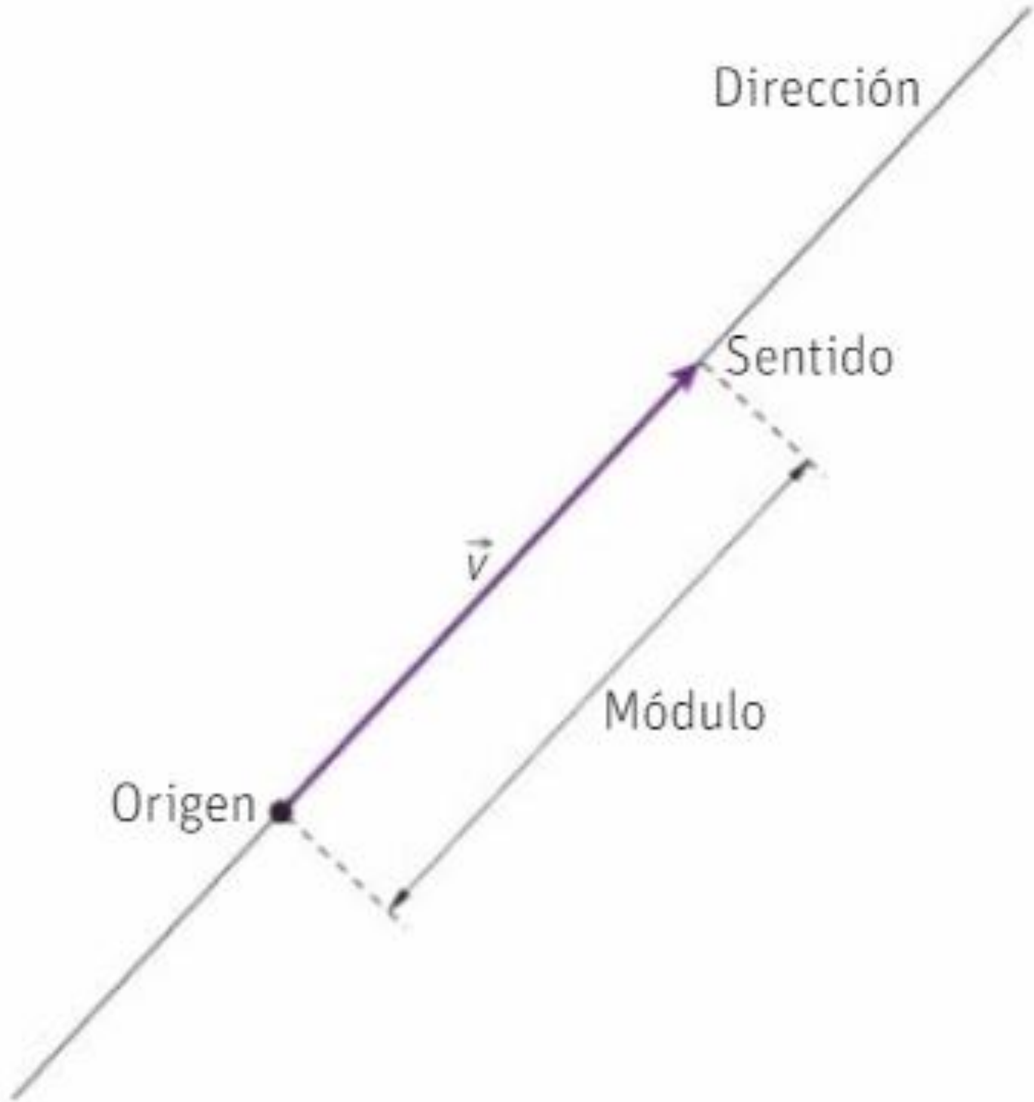


Figura 3. Elementos de un vector.

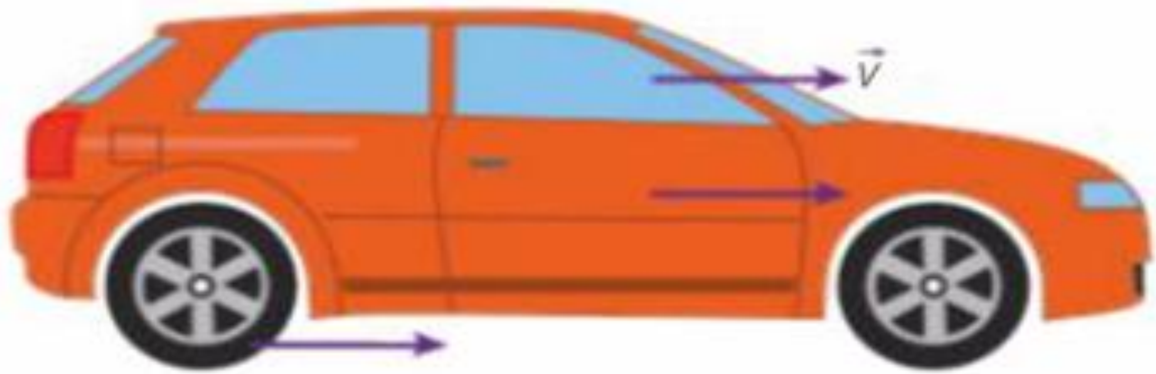
Tipos de vectores

- Vectores Libres: producen el mismo efecto cuando se desplazan paralelamente a si mismos (siempre que su módulo y su sentido sean iguales)

- Vectores Deslizantes: sólo pueden variar su punto de aplicación a lo largo de su dirección.

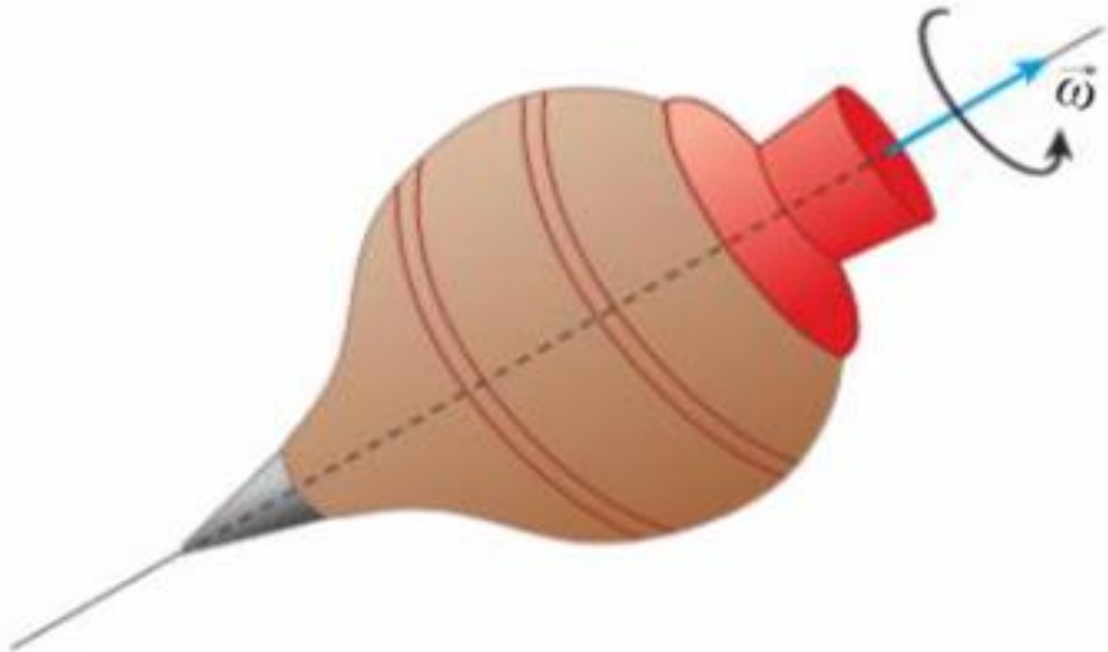
- Vectores Ligados o Fijos: su origen, dirección y sentido no pueden cambiar y son fijos.

Vectores libres



Son aquellos que se pueden trasladar paralelamente a sí mismos sobre cualquier recta directriz. Por ejemplo, la velocidad de traslación $\vec{v}$ de un cuerpo se puede aplicar en cualquiera de sus puntos.

Vectores deslizantes o cursores



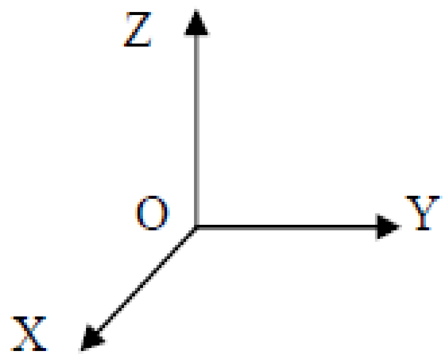
Son vectores que no resultan modificados cuando se desplazan sobre su recta directriz. Por ejemplo, la tensión de una cuerda de masa despreciable o la velocidad angular $\vec{\omega}$ asociada a un eje de giro.

Vectores fijos o ligados

Son aquellos cuyo origen, dirección y sentido son fijos e inmutables. Por ejemplo, el momento de rotación de una fuerza o la intensidad de campo vectorial dependen del punto de aplicación.

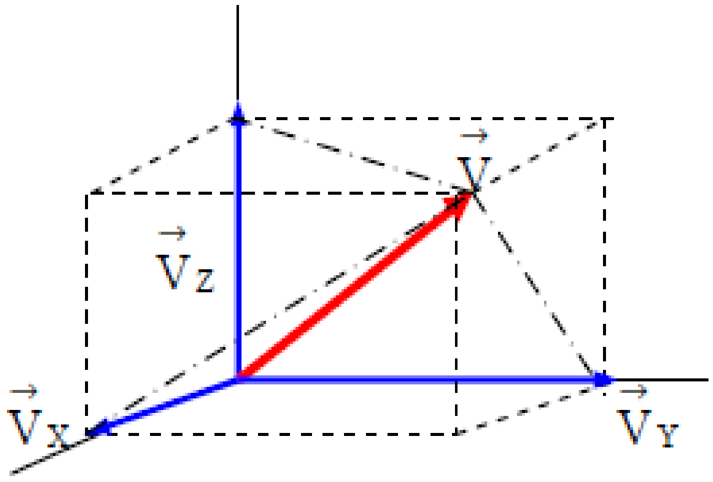
COMPONENTES VECTORIALES DE UN VECTOR.

Para situar un vector en el espacio es necesario tomar un sistema de referencia. Tomaremos el formado por los ejes cartesianos OX, OY, OZ, perpendiculares entre sí.



Las puntas de flecha indican el sentido que arbitrariamente se toma como positivo.

Se llaman **componentes vectoriales** o vectores componentes de un vector $\vec{V}$, a sus proyecciones orientadas sobre los ejes de coordenadas.



$\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$, $\vec{V}_Z$ son las componentes vectoriales del vector $\vec{V}$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y + \vec{V}_Z}$$

VECTORES UNITARIOS FUNDAMENTALES. COMPONENTES ESCALARES.

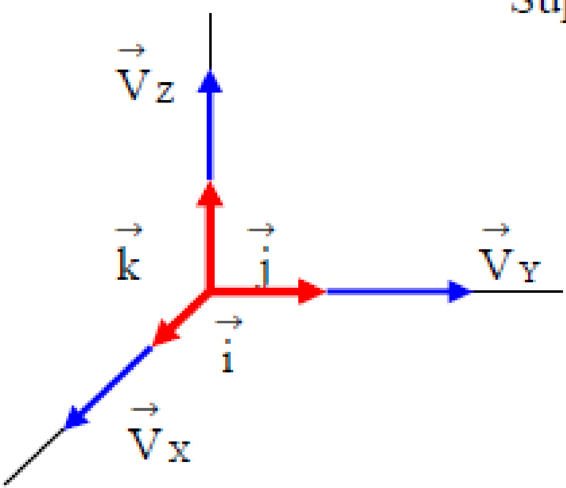
Un vector unitario o versor es un vector de módulo la unidad.

Todo vector se puede poner como

$$\boxed{\vec{V} = |\vec{V}| \times \vec{u}}$$

siendo $\vec{u}$ un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{V}$.

Se llaman **vectores unitarios fundamentales** ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) a los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados y sentido positivo.



Supongamos un vector de componentes vectoriales $\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$, $\vec{V}_Z$

$$\vec{V}_X = Vx \, . \, \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_Y = Vy \, . \, \vec{j} \quad , \quad \vec{V}_Z = Vz \, . \, \vec{k}$$

Por lo que :

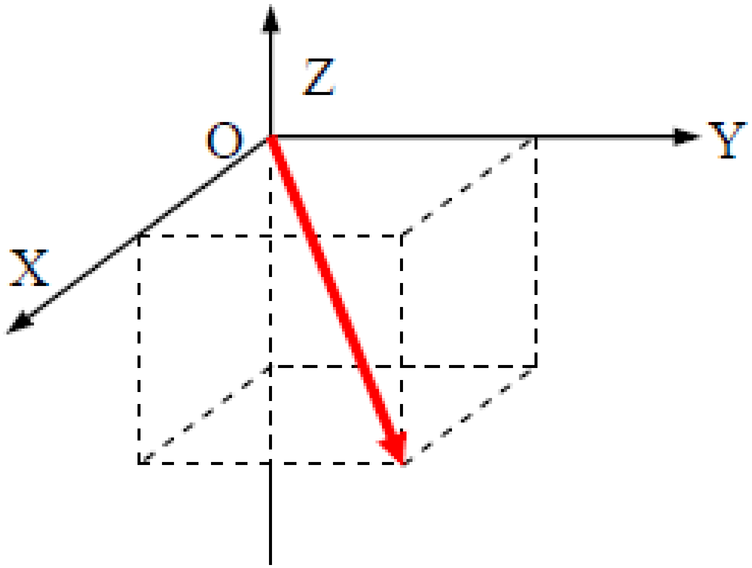
$$\boxed{\vec{V} = Vx \, . \, \vec{i} + Vy \, . \, \vec{j} + Vz \, . \, \vec{k}}$$

o bien $\vec{V} = (Vx , Vy , Vz)$

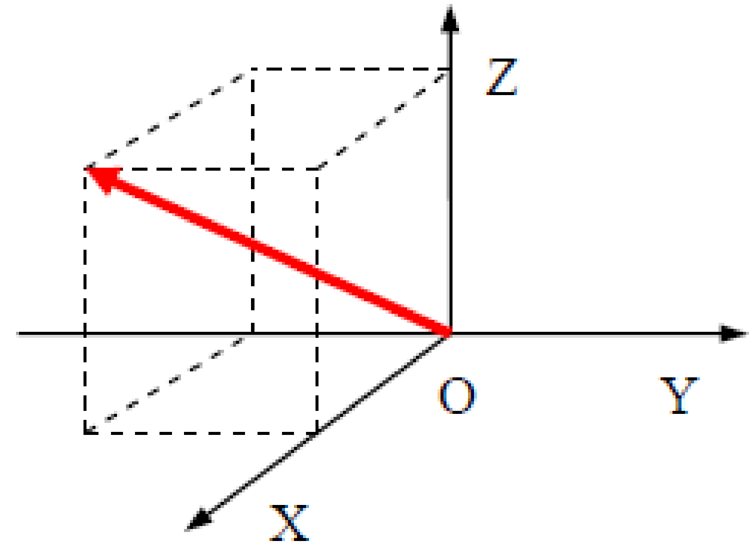
Los escalares Vx, Vy, Vz se llaman **componentes escalares** del vector $\vec{V}$. En valor absoluto coinciden con el módulo de las componentes vectoriales, pero están afectadas de un signo + o -, según el sentido de las componentes.

Ejemplos:

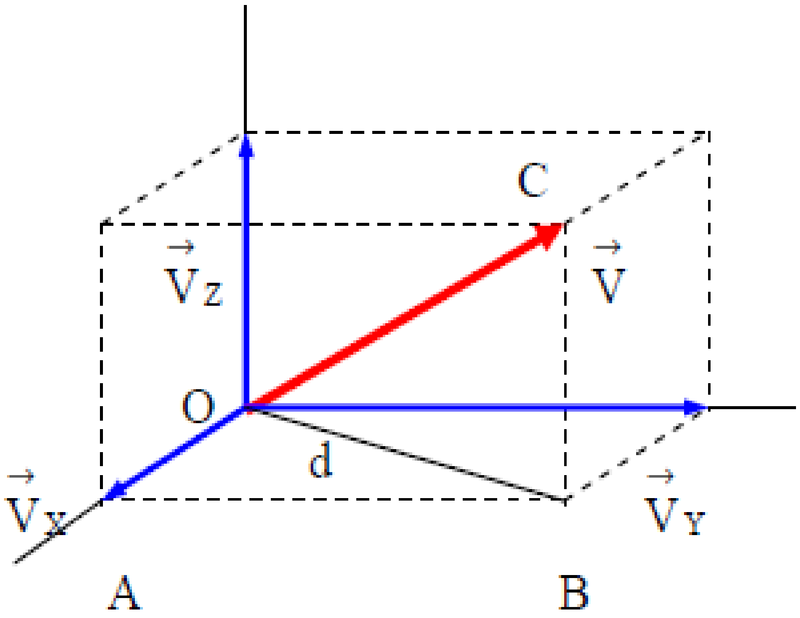
$\vec{A} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$

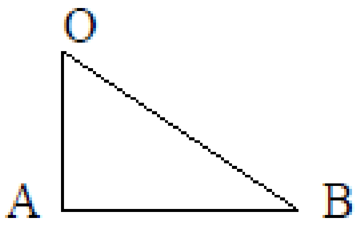


$\vec{B} = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$

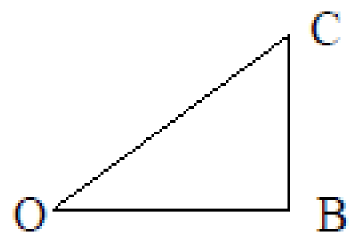


MÓDULO DE UN VECTOR.





$$d^2 = V_X^2 + V_Y^2$$

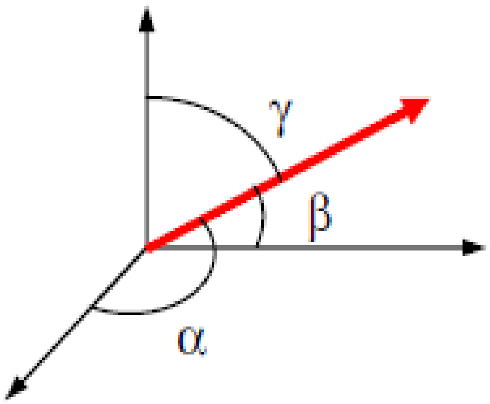


$$\left|\vec{V}\right|^2 = d^2 + V_Z^2$$

por lo que $\left|\vec{V}\right|^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$, de donde: $\boxed{\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}}$

COSENOS DIRECTORES.

La dirección y el sentido de un vector quedan determinados por los **cosenos directores**, que son los cosenos de los ángulos que forma el vector con los ejes cartesianos:



$$\cos\alpha = \frac{V_X}{V} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{V_Y}{V} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{V_Z}{V}$$

$$\boxed{Vx = V.\cos\alpha} \quad \boxed{Vy = V.\cos\beta} \quad \boxed{Vz = V.\cos\gamma}$$

como $V^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$, se deduce:

$$V^2 = V^2.\cos^2\alpha + V^2.\cos^2\beta + V^2.\cos^2\gamma \quad ; \quad V^2 = V^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$\boxed{1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

Vectores en coordenadas cartesianas

Para el estudio de determinados fenómenos físicos es necesario adoptar un sistema de referencia, y el más habitual (aunque no el único posible) es el de coordenadas cartesianas ortogonales (x, y, z): a las direcciones del espacio, X, Y, Z, se les asocian los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente.

Cualquier **vector del espacio** en coordenadas cartesianas puede escribirse como una combinación lineal de los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Los coeficientes v_x, v_y, v_z reciben el nombre de **coordenadas cartesianas** del vector, que son las proyecciones del vector sobre cada eje:

$$v_x = v\cos\alpha \qquad v_y = v\cos\beta \qquad v_z = v\cos\gamma$$

Por tanto, cualquier vector puede descomponerse y expresarse en función de sus coordenadas cartesianas de diversos modos:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = v\cos\alpha\,\vec{i} + v\cos\beta\,\vec{j} + v\cos\gamma\,\vec{k}$$

La expresión (v_x, v_y, v_z) representa al vector $\vec{v}$ y también a las coordenadas del punto extremo del vector.

Los cosenos reciben el nombre de **cosenos directores**, y cumplen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

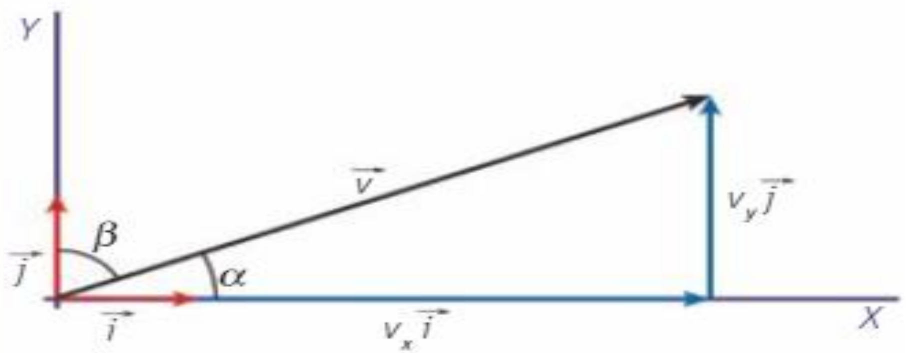
El **módulo de un vector** expresado en coordenadas cartesianas es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Recuerda

Para un vector en el plano, las coordenadas cartesianas vienen dadas por:

$$v_x = v\cos\alpha$$
$$v_y = v\,\text{sen}\,\alpha$$



$$v_x = v\cos\alpha \qquad v_y = v\cos\beta \qquad v_z = v\cos\gamma$$

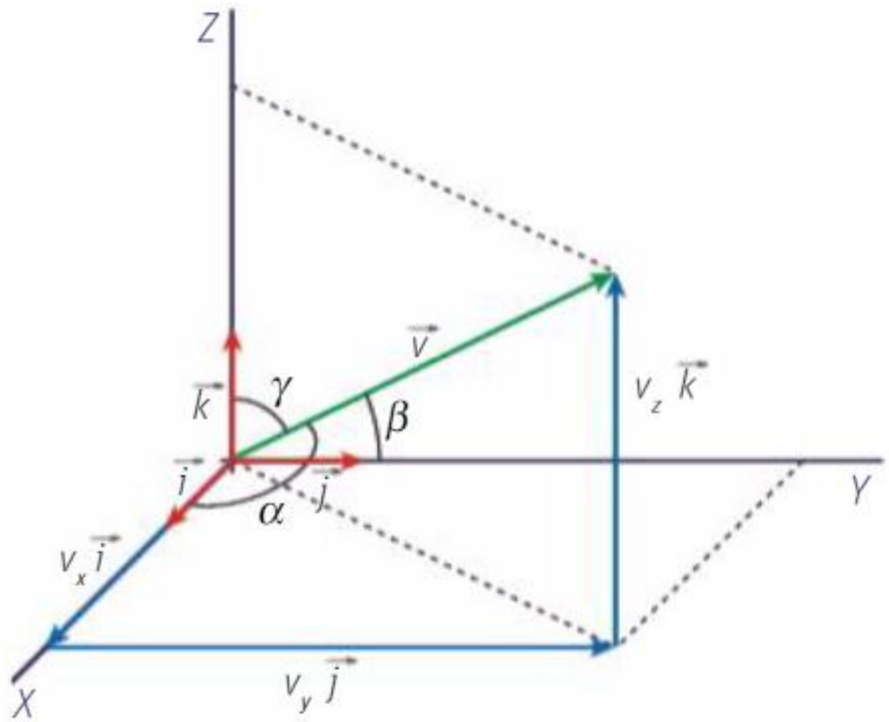
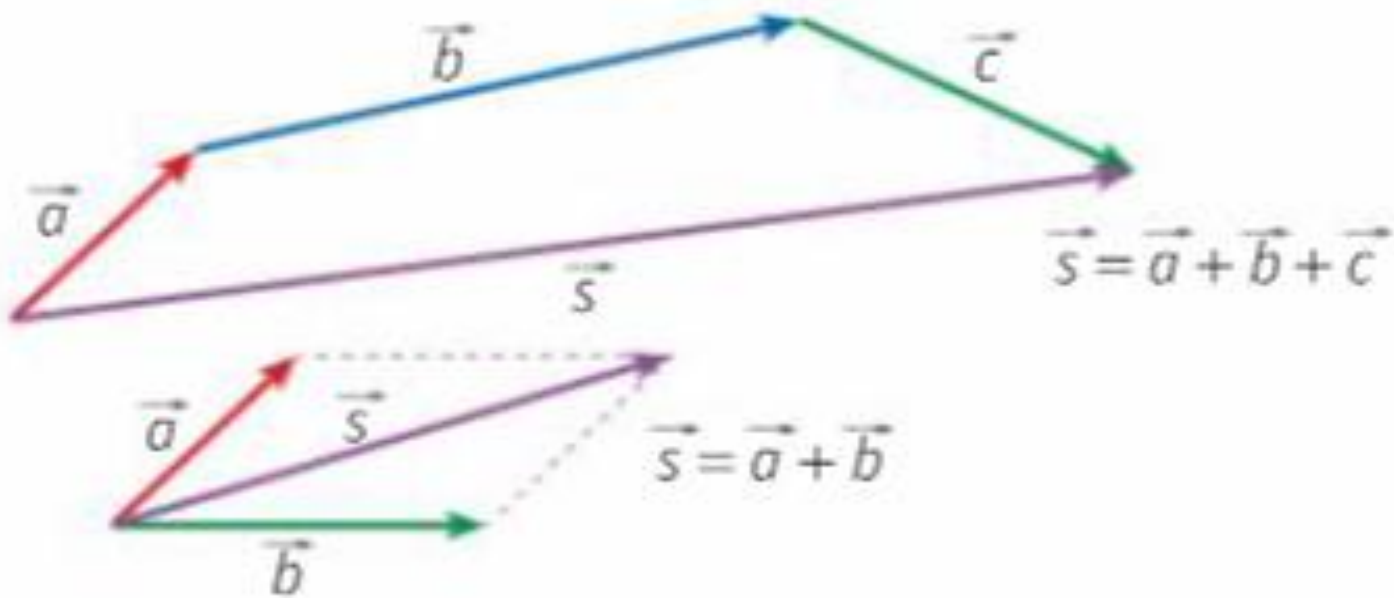


Figura 4. Coordenadas cartesianas y cosenos directores de un vector del espacio.

Operaciones con vectores

Suma de vectores



La suma geométrica de dos o más vectores es otro vector que resulta de unir el origen del primero con el extremo del último. Aplicada a dos vectores se conoce como **regla del paralelogramo**.

- **Analíticamente (en función de las componentes cartesianas)**. El vector suma es un vector cuyas componentes son la suma de las componentes.

$$\vec{U} = Ux\,.\,\vec{i} + Uy\,.\,\vec{j} + Uz\,.\,\vec{k} \quad , \quad \vec{V} = Vx\,.\,\vec{i} + Vy\,.\,\vec{j} + Vz\,.\,\vec{k}$$

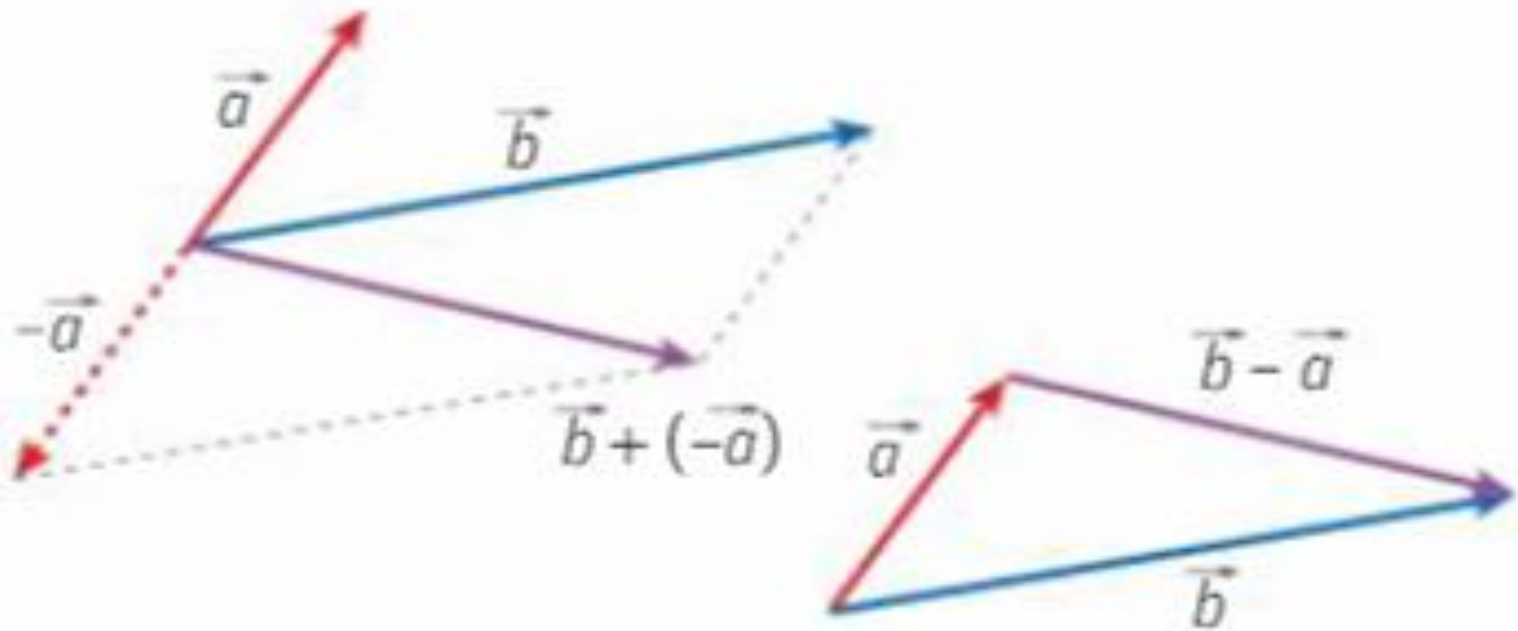
$$\boxed{\vec{S} = \vec{U} + \vec{V} = (Ux + Vx)\,.\,\vec{i} + (Uy + Vy)\,.\,\vec{j} + (Uz + Vz).\ \vec{k}}$$

<u>Ejemplo:</u>

Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, la suma vectorial

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (2 + 4)\,\vec{i} + (-3 + 2)\,\vec{j} + (1 + 5)\,\vec{k} = 6\,\vec{i} - \vec{j} + 6\,\vec{k}$$

Resta de vectores



Para restar dos vectores, se disponen unidos por el origen y se suma al primero el opuesto del segundo. Dicha disposición se da a menudo en física: $\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$, etc.

- **En función de las componentes cartesianas**: El vector diferencia es un vector cuyas componentes son la diferencia de las componentes.

$$\vec{U} = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k} \qquad , \qquad \vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{U} - \vec{V} = (U_x - V_x) \cdot \vec{i} + (U_y - V_y) \cdot \vec{j} + (U_z - V_z) \cdot}$$

<u>Ejemplo:</u>

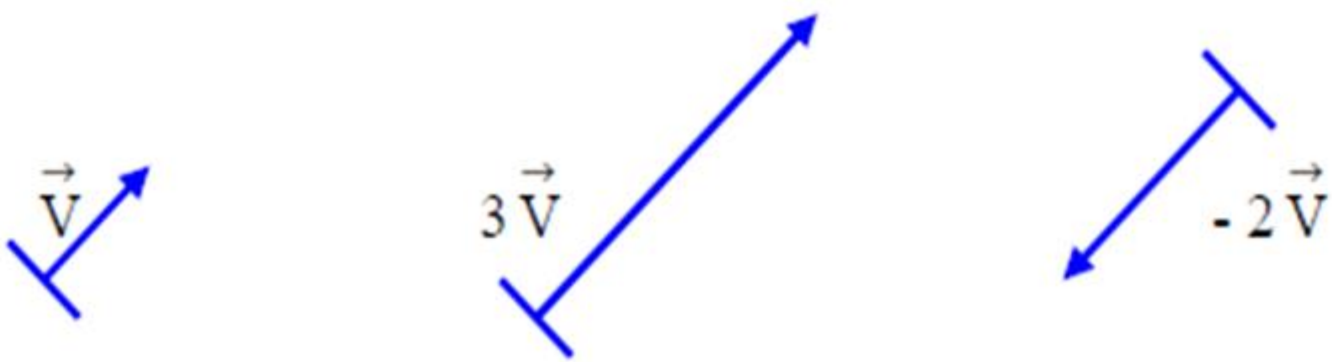
Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, la diferencia

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = (2 - 4)\,\vec{i} + (-3 - 2)\,\vec{j} + (1 - 5)\,\vec{k} = -2\,\vec{i} - 5\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR.

El producto de un escalar, q , por un vector $\vec{V}$, es otro vector que tiene:

- Módulo: el producto del $|q|$ por el modulo del vector $\vec{V}$.
- Dirección: la dirección de $\vec{V}$.
- Sentido: el de $\vec{V}$ si q es +, y sentido contrario a $\vec{V}$ si q es –



Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector $\vec{v}$ por un escalar n nos da el vector $n\vec{v}$, que es, sin más, un múltiplo: n veces el vector $\vec{v}$. Un ejemplo es el vector momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$.

- En función de las componentes cartesianas:

$$\vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{q \cdot \vec{V} = (q \cdot Vx) \cdot \vec{i} + (q \cdot Vy) \cdot \vec{j} + (q \cdot Vz) \cdot \vec{k}}$$

<u>Ejemplo</u>: $\vec{V} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$, $3\,\vec{V} = 9\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$, $-2\,\vec{V} = -6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

- Esta operación permite justificar la expresión: $\vec{V} = |\vec{V}| \times \vec{u}$, y por tanto:

$$\vec{V}_X = Vx \cdot \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_Y = Vy \cdot \vec{j} \quad , \quad \vec{V}_Z = Vz \cdot \vec{k}$$

EJERCICIO RESUELTO

6 Efectúa, de manera algebraica, las siguientes operaciones:

a) Suma y resta los vectores $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ y $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$.

b) Multiplica un número n por el vector $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$.

a) $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \qquad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}$$

b) $n\vec{v}=nv_x\vec{i}+nv_y\vec{j}+nv_z\vec{k}$

ACTIVIDADES

4. A partir de los vectores $\vec{a}=(1,0,3)$; $\vec{b}=(3,-2,0)$ y $\vec{c}=(-1,2,-2)$, efectúa las operaciones que se indican.

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

b) $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$

c) $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

5. Dadas tres fuerzas concurrentes, cuyos valores son F_1 = 40 N, F_2 = 50 N y F_3 = 25 N, que forman 30°, 120° y –180° respectivamente con el eje X, calcula:

a) La fuerza resultante de sumar las tres.

b) El módulo de la resultante y el ángulo que forma con X.

Solución: a) $\vec{R}=-15{,}5\vec{i}+63{,}3\vec{j}$; b) 65,1 N, 103,7°

Producto escalar de dos vectores

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es un escalar que se obtiene multiplicando el valor de los módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$$

De la definición de producto escalar se deducen las siguientes propiedades:

- Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (el producto escalar es conmutativo).
- La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es $|\vec{a}|\cos\alpha$.
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\equiv a^2$
- $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot j=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$
- $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot i=0$

A partir de la expresión de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en sus coordenadas cartesianas, se puede obtener la expresión del producto escalar siguiendo la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = \\ &= a_xb_x\vec{i}\,\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\,\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\,\vec{k}+ \\ &= a_yb_x\vec{j}\,\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\,\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\,\vec{k}+ \\ &= a_zb_x\vec{k}\,\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\,\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\,\vec{k}\end{aligned}$$

Conforme a las dos últimas propiedades del producto escalar, la expresión queda:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

<u>Ejemplo</u>:

Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = (2\,.\,4) + (-3\,.\,2) + (1\,.\,5) = 8 - 6 + 5 = 7$$

CONSECUENCIAS DEL PRODUCTO ESCALAR

- Dos vectores cuyo producto escalar es 0 son perpendiculares. (Condición de perpendicularidad)

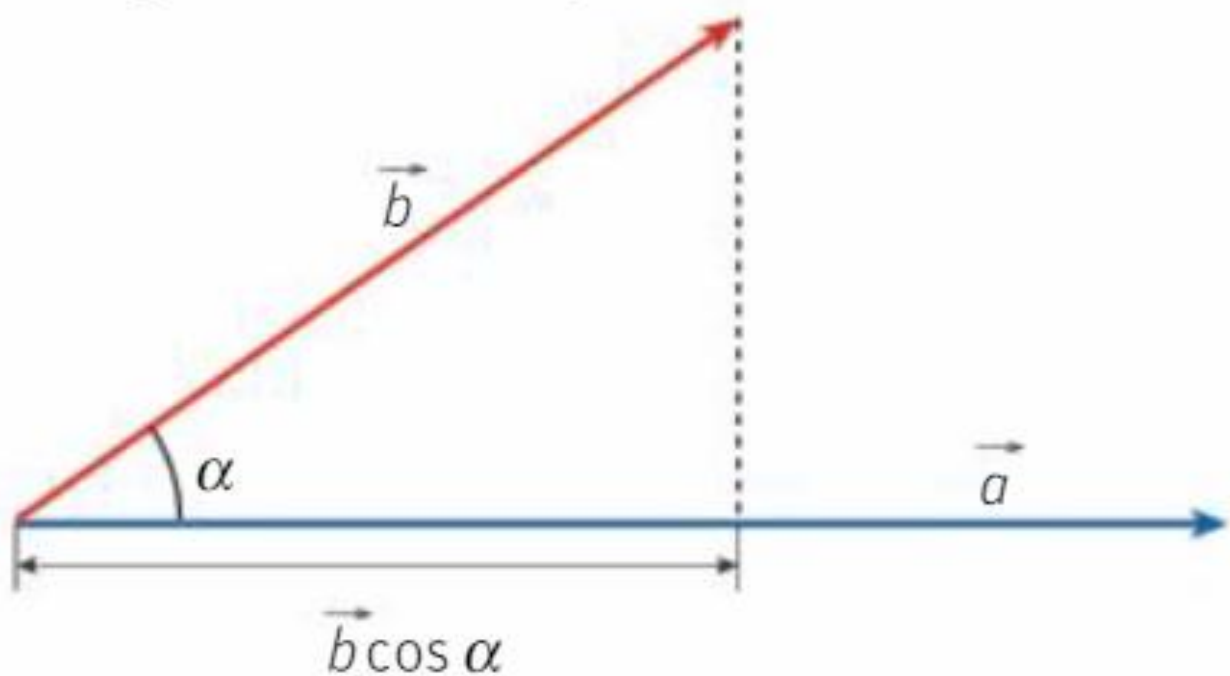
- Se puede calcular el ángulo que forman dos vectores de la forma siguiente:

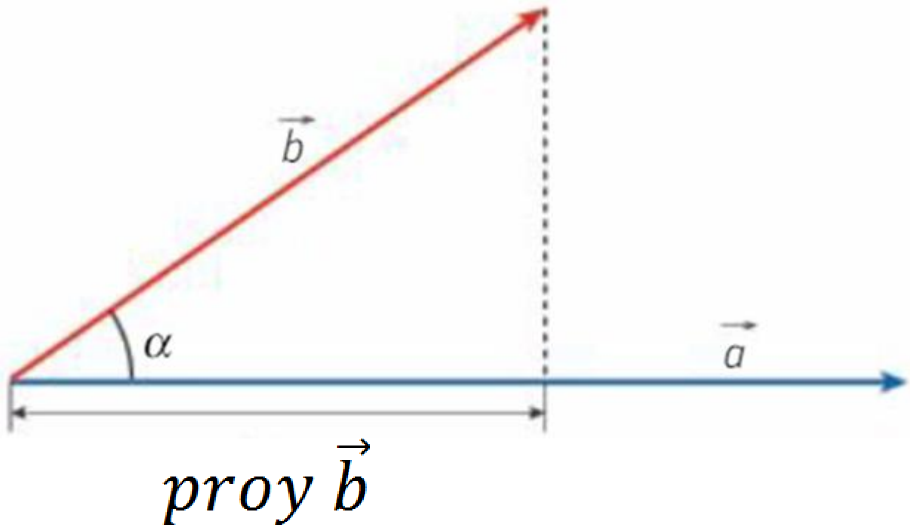
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR

Recuerda

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos, $|\vec{a}|$, por la proyección del otro sobre él, $|\vec{b}|\cos\alpha$ (interpretación geométrica del producto escalar):





$$\cos\alpha = \frac{proy\ \vec{b}}{|b|}$$

$$proy\ \vec{b} = \underbrace{|b| \cdot \cos\alpha}$$

Como $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot \overbrace{|b| \cdot \cos\alpha}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot proy\ \vec{b}$$

Luego $\quad \boxed{proy\ \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a|}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

7 Halla el ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{a}=(1,2,-1)$ y $\vec{b}=(3,-2,0)$.

A partir de la definición:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\,b\cos\alpha=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\,\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2}\cos\alpha$$

A partir de sus coordenadas cartesianas:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 3+2\cdot(-2)+(-1)\cdot 0=-1$$

Despejando el ángulo α:

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{6}\,\sqrt{13}}=-0,113\Rightarrow\alpha=96,5^{\circ}$$

8 El trabajo físico se define como el producto escalar del vector fuerza, $\vec{F}$, por el vector desplazamiento, $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$. Determina el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}=(2\vec{i}-3\vec{j})\,\text{N}$ cuando desplaza su punto de aplicación $\Delta\vec{r}=(-5\vec{k})\,\text{m}$.

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=(2\vec{i}-3\vec{j})\cdot(-5\vec{k})=2\cdot 0+(-3)\cdot 0+0\cdot(-5)=0\ \text{(no realiza trabajo)}$$

ACTIVIDADES

6. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -2, 1)$ y $\vec{b} = (-1, -1, 0)$, halla:

a) El ángulo que forman entre sí.

b) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

Solución: a) 90°; b) 0

7. Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$ N al desplazar su punto de aplicación desde el punto A(1, 4, 0) hasta el punto B(3, −2, 1).

Solución: −4 J

Producto vectorial de dos vectores

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector que tiene las siguientes características:

- Su módulo es el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman:

  $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \operatorname{sen}\alpha$
- Su **dirección** es perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- Su **sentido** coincide con el avance de un tornillo o un sacacorchos que girase de $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$ por el ángulo más pequeño.

La expresión $\vec{a} \times \vec{b}$ también puede escribirse como $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

De esta definición se deducen las siguientes propiedades:

- Si $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. Por tanto, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (el producto escalar es anticonmutativo).
- $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$
- $\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}$

A partir de la expresión de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en sus coordenadas cartesianas, se puede hacer el producto vectorial siguiendo la propiedad distributiva:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Dicha expresión suele escribirse en forma de un determinante de tres filas y tres columnas, que se calcula del siguiente modo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

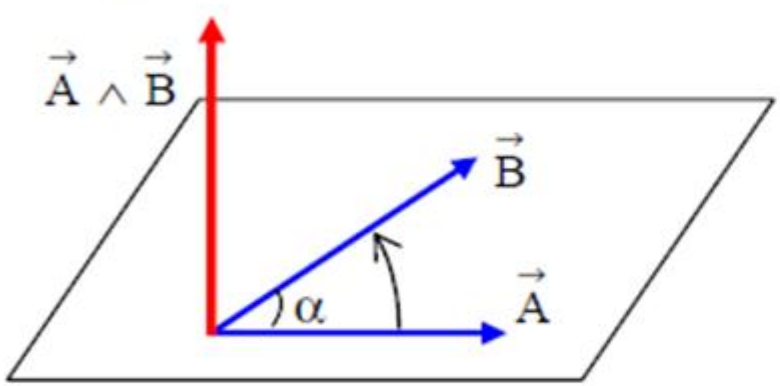
Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$ es un vector que tiene:

- <u>Módulo</u>: el producto del módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$ y por el seno del ángulo que forman entre ellos:

$$\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

- <u>Dirección</u>: perpendicular al plano determinado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

- <u>Sentido</u>: se puede deducir de dos formas: 1) por <u>la regla del sacacorchos</u>: el sentido viene indicado por el sentido de avance de un sacacorchos que girase para ir del primer vector al segundo vector por el camino más corto. 2) por <u>la regla de la mano derecha</u>: cogiendo con la mano derecha la dirección del vector producto vectorial, de tal forma que los dedos indiquen el sentido de paso del primer vector al segundo vector por el camino más corto, el pulgar extendido indica el sentido del vector producto vectorial.



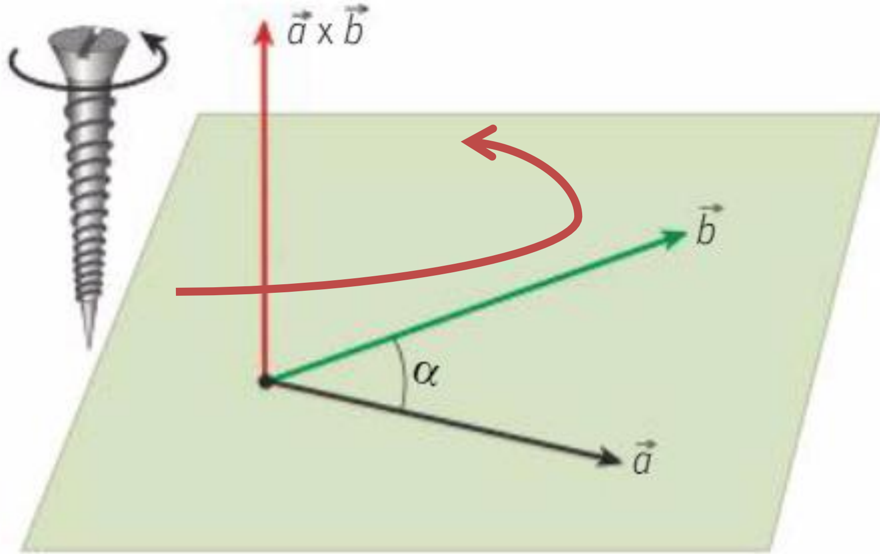
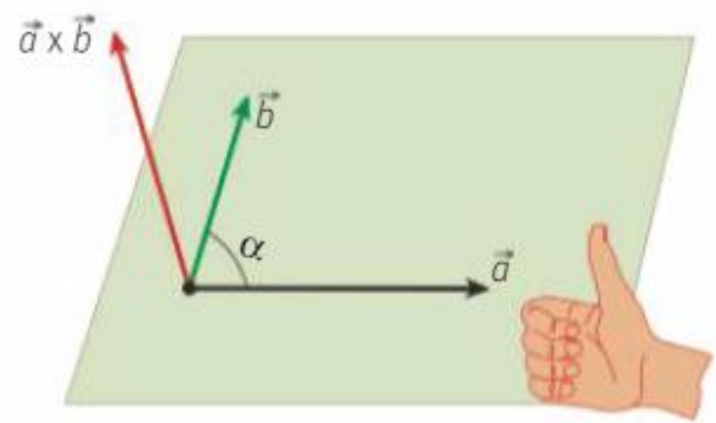


Figura 5. Producto vectorial de dos vectores.

Miramos el sentido de giro desde ***a*** hacia ***b.***
Un tornillo o un sacacorchos que girase de esa forma, vemos si entra o sale del plano de ambos vectores.

Te interesa saber

Si colocamos los dedos en el sentido de giro que va desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$, el dedo gordo marca la dirección del producto $\vec{a} \times \vec{b}$ (regla de la mano derecha).



Ejemplo: Dados los vectores $\vec{A}(1, 2, 4)$ y $\vec{B}(2, -1, 3)$. Halla el producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

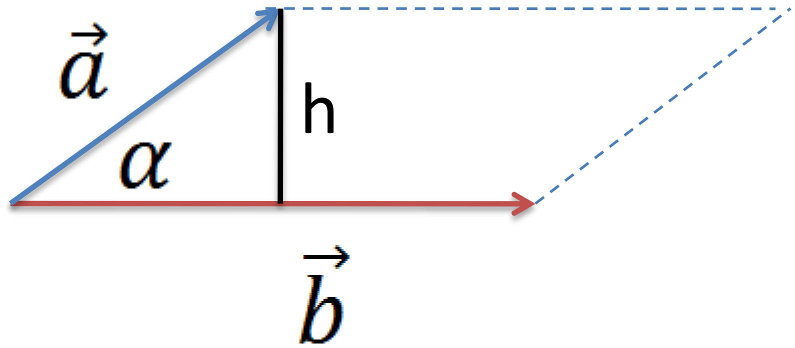
Utilizando la anterior expresión:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (2 . 3 - 4 . (-1))\,\vec{i} + (4 . 2 - 1 . 3)\,\vec{j} + (1 . (-1) - 2 . 2)\,\vec{k} = 10\,\vec{i} + 5\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

o bien como desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL



$$\sin\alpha = \frac{h}{|a|}$$

$$h = |a| \cdot \sin\alpha$$

Como

$$|\vec{a}\;x\;\overrightarrow{b}| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\alpha$$

$$|\vec{a}\;x\;\overrightarrow{b}| = h \cdot |b|$$

$$|\vec{a}\;x\;\overrightarrow{b}| = S_{paralelogramo}$$

Momento de un vector respecto a un punto

El **momento**, $\vec{M}_0$, de un vector $\vec{a}$ respecto a un punto O es el producto vectorial:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{a}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de $\vec{a}$, trazado desde O hasta el origen de $\vec{a}$.

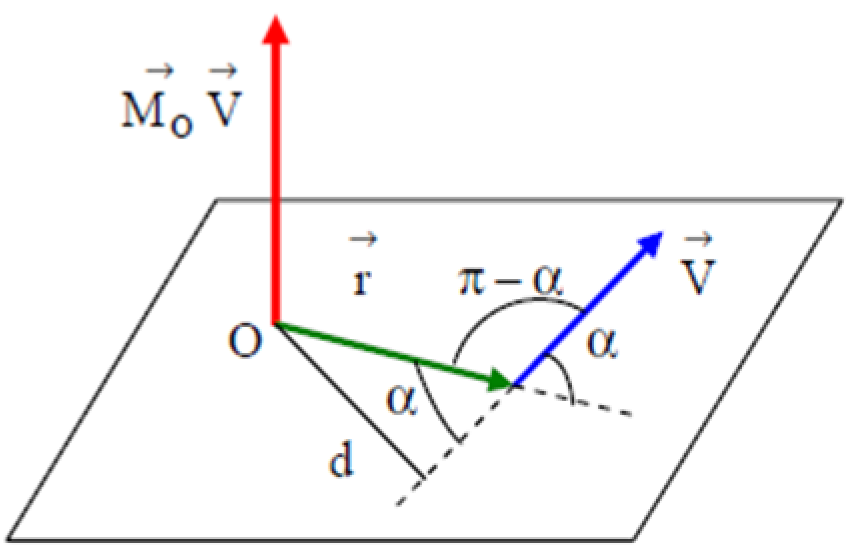
Diversas magnitudes físicas se definen mediante el producto vectorial. Por ejemplo:

- El **momento angular**, $\vec{L}$, de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ se define como $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.
- El **momento de una fuerza** $\vec{F}$ aplicada en un punto P respecto a un punto O se define como $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, donde $\vec{r}$ va desde O hasta P.

MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO.

Se llama momento de un vector $\vec{V}$ respecto a un punto O: $\boxed{\vec{M}_O \vec{V} = \vec{r} \wedge \vec{V}}$

siendo $\vec{r}$ (vector de posición) un vector que tiene como origen el punto O, y como extremo, el origen de $\vec{V}$.



El vector momento, por tanto, es un vector que tiene:

- <u>Módulo</u>: el producto del módulo de $\vec{r}$ por el módulo de $\vec{V}$ y por el seno del ángulo que forman entre ellos:

$$\left|\vec{M}_O \vec{V}\right| = |\vec{r}| \cdot |\vec{V}| \cdot \text{sen}\ \alpha \quad ; \qquad \text{como} \quad |\vec{r}| \cdot \text{sen}\,\alpha = d \quad , \quad \text{siendo d la distancia}$$

del punto O a la línea de acción de $\vec{V}$, también se puede calcular: $\left|\vec{M}_O \vec{V}\right| = d \cdot |\vec{V}|$

es decir, el vector $\vec{V}$ se puede deslizar a lo largo de su línea de acción, sin que se modifique su momento.

- <u>Dirección</u>: perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{V}$.
- <u>Sentido</u>: se traslada paralelamente $\vec{V}$ hasta el punto O, para que ambos vectores tengan origen común y a continuación se aplica <u>la regla del sacacorchos</u> o <u>la regla de la mano derecha</u>: el sentido viene indicado por el sentido de avance de un sacacorchos que girase para ir de $\vec{r}$ a $\vec{V}$ por el camino más corto.

EJERCICIO RESUELTO

9 Halla el momento angular respecto al origen de coordenadas de una partícula de 5 kg que se encuentra en el punto P(2, 3, 0), con velocidad $\vec{v}=6\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$ (en unidades del SI).

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=m(\vec{r}\times\vec{v})=5\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 0\\ 6 & 5 & -4\end{vmatrix}=5\cdot(-12\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k})$$

$$\vec{L}=(-60\vec{i}+40\vec{j}-40\vec{k})\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$$

ACTIVIDADES

8. El punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ es el punto P(3, 0, 2). Calcula el momento de la fuerza:

   a) Respecto al origen.

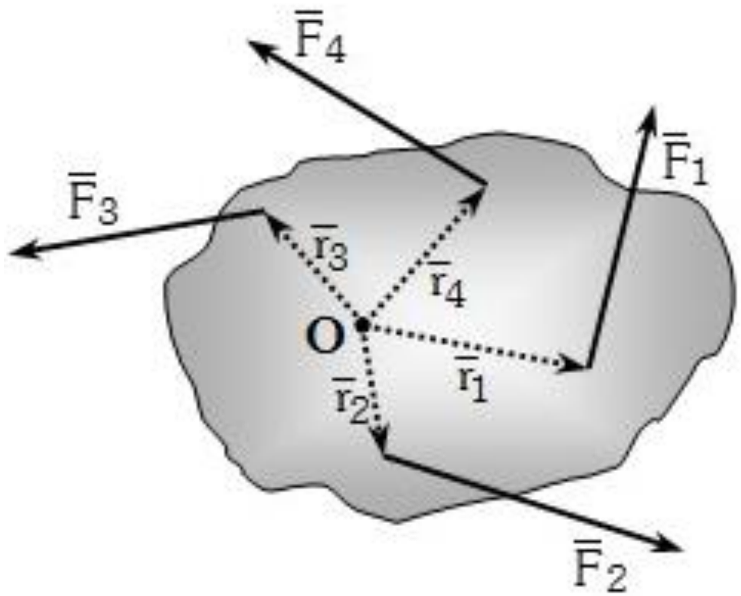
   b) Respecto a Q(1, 1, 1).

   Solución: a) $M_0=(6\vec{i}-8\vec{j}-9\vec{k})\,\mathrm{Nm}$;

   b) $M_Q=(-\vec{i}-6\vec{j}-4\vec{k})\,\mathrm{Nm}$

TEOREMA DE VARIGNON

El momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas componentes.



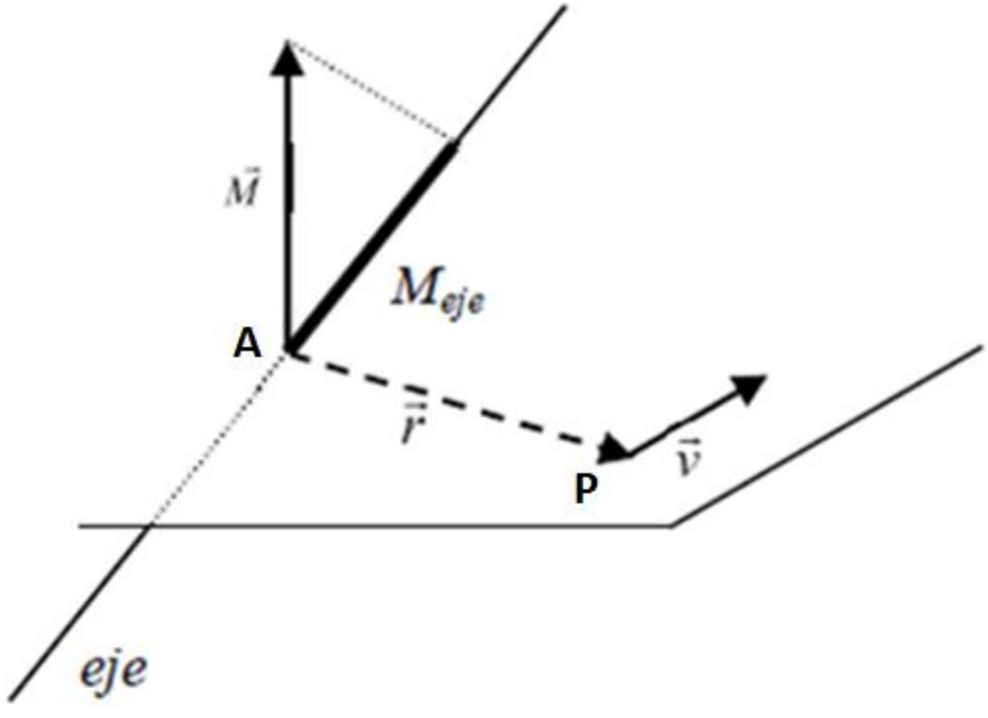
$$\boxed{F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4}$$

$$M_R = \sum M_i$$

$$\boxed{\overline{r} \times \overline{F}_R = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 + \overline{r}_3 \times \overline{F}_3 + \overline{r}_4 \times \overline{F}_4}$$

MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN EJE

Es la proyección sobre el eje del momento del vector respecto a uno de los puntos de dicho eje. Se trata de una magnitud escalar. Se deduce fácilmente que si el vector y el eje son coplanarios el momento de con respecto a ese eje vale 0.



Se trata por tanto de un escalar

Pasos a seguir:

- Elegimos un punto del eje (A)

- Calculamos el vector $\overrightarrow{AP} = \vec{r}$

- Calculamos el momento de dicho vector

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \; x \; \vec{a}$$

- Calculamos un vector unitario en la dirección del eje

$$\vec{u}_{eje}$$

- Calculamos el momento respecto al eje

$$M_{eje} = \overrightarrow{M} \cdot \vec{u}_{eje}$$

PRODUCTO TRIPLE DE TRES VECTORES

Se trata de una magnitud escalar, cuyo valor coincide con el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores concurrentes.

$$\vec{a} \cdot (\overrightarrow{b}\ x\ \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO A UN ESCALAR.

Algunas magnitudes vectoriales, como la velocidad, varían en función de un escalar, como el tiempo: $\vec{V} = f(t)$. Se define la derivada de $\vec{V}$ respecto a t, como:

$$\vec{V}' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

La derivada de un vector $\vec{V}$ respecto a un escalar t , es la suma de las derivadas de sus componentes:

$$\vec{V} = Vx \,.\, \vec{i} + Vy \,.\, \vec{j} + Vz \,.\, \vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\,Vx}{dt} \,.\, \vec{i} + \frac{d\,Vy}{dt} \,.\, \vec{j} + \frac{d\,Vz}{dt} \,.\, \vec{k}}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

$$\frac{dk}{dt} = 0 \qquad\qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\frac{dt}{dt} = 1 \qquad\qquad (f \,.\, g)' = f'.g + f.g'$$

$$\frac{dt^n}{dt} = n \,.\, t^{n-1} \qquad\qquad (k \,.\, f)' = k \,.\, f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x \ln a$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e$
$f(x)=sen\ x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=arcsen\ x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-sen\ x$	$f(x)=arcos\ x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=tg\ x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$f(x)=arctg\ x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad (n \neq -1) \Rightarrow \int f^n \cdot f' = \frac{f^{n+1}}{n+1} + k$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$$

$$\int senx dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x dx = senx + k$$

$$\int (1 + tg^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + k$$

$$1.-\int x^{a}\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ si\ a \neq -1,\ a \in R$$

$$2.-\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

$$3.-\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$$

$$4.-\int a^{x} = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,\ si\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$5.-\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$$

$$6.-\int \cos x\,dx = sen\,x + C$$

$$7.-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx = arcsen\,(x) + C$$

$$8.-\int \frac{1}{1+x^{2}}dx = \operatorname{arctg}(x) + C$$

INTEGRALES DEFINIDAS

$$Si\ f(x) = k\ (k \in R) \rightarrow \int_a^b k dx = k(b-a)$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$