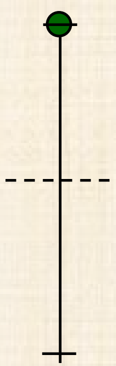
MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE

M.V.A.S.

MOVIMIENTO OSCILATORIO

¿Qué es un movimiento oscilatorio?

Una partícula tiene un **movimiento oscilatorio** cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio (movimiento de un péndulo, de un peso unido a un resorte...). Su estudio es esencial para entender el movimiento ondulatorio.

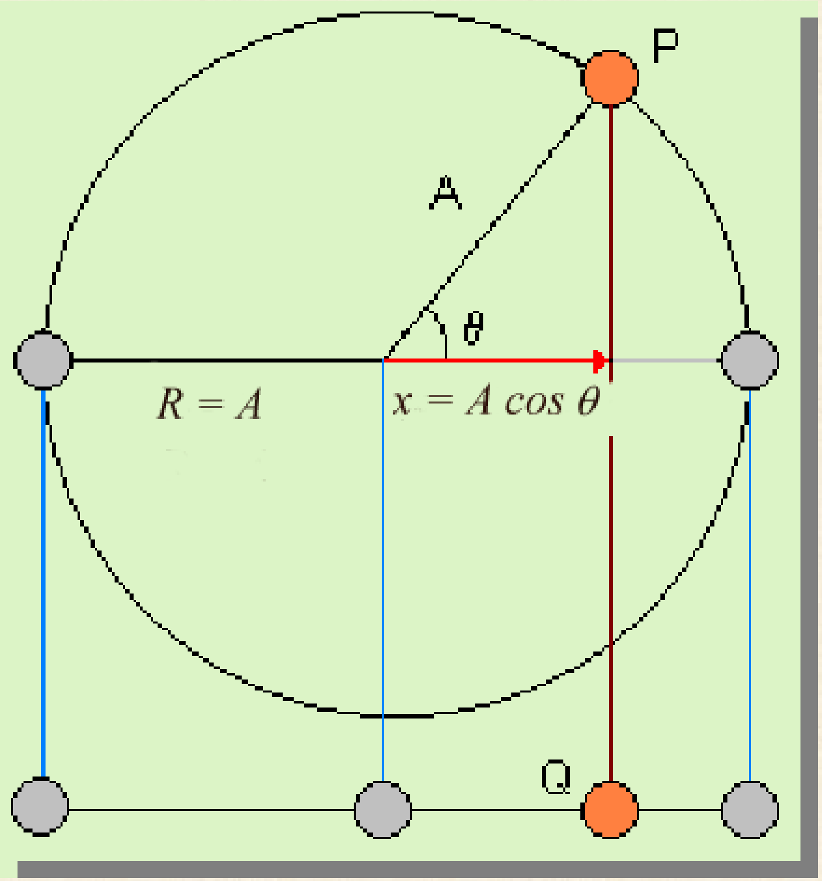


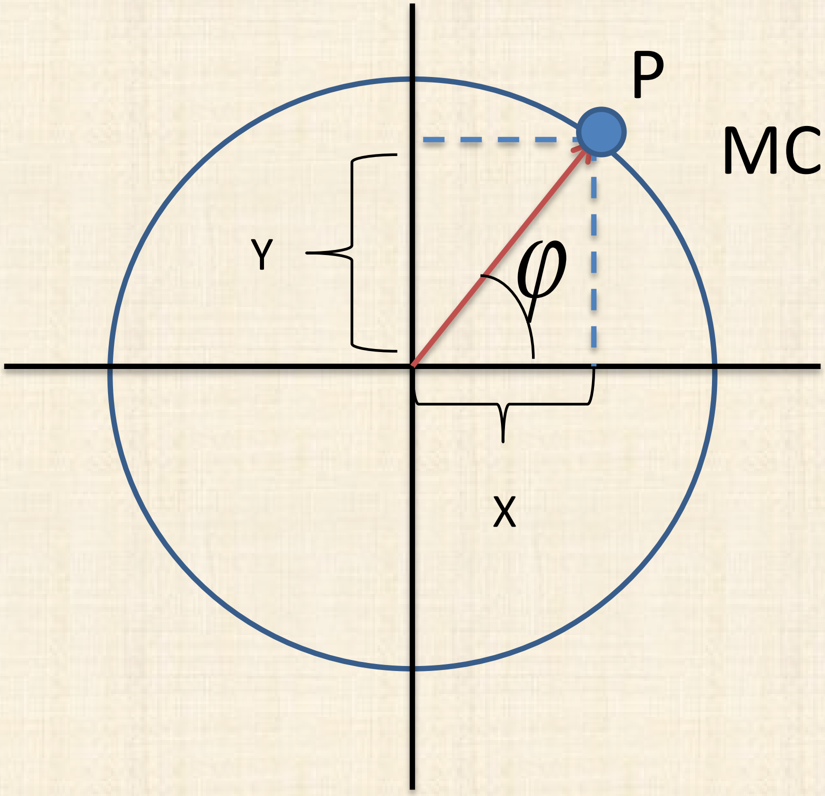
¿Qué es un movimiento armónico simple (MAS)?

Es el más importante de los movimientos oscilatorios (representa a muchas oscilaciones presentes en la naturaleza), pero también el más sencillo de describir y analizar. No todos los movimientos oscilatorios son armónicos.

El mvas como proyección de un movimiento circular uniforme (mcu)

Podemos estudiar la cinemática del mvas como la proyección de un movimiento circular sobre uno de los diámetros de la circunferencia que constituye su trayectoria.





MCU

$$\varphi = \omega t + \varphi_o$$

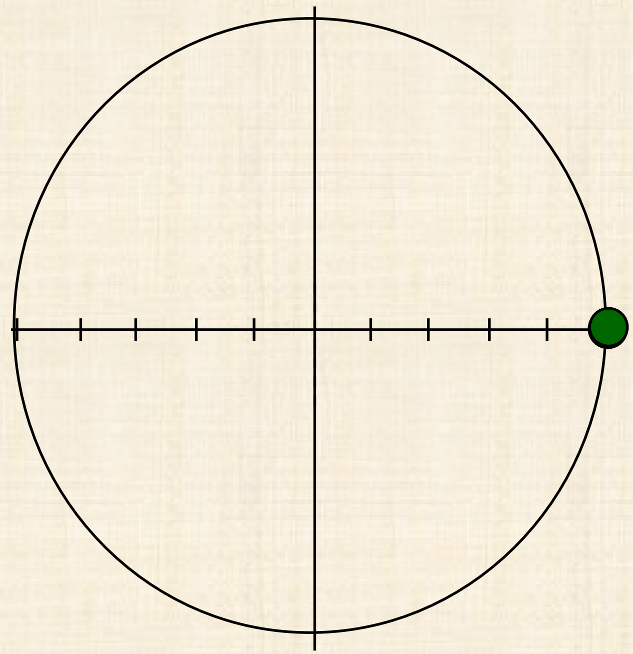
Por trigonometría tenemos:

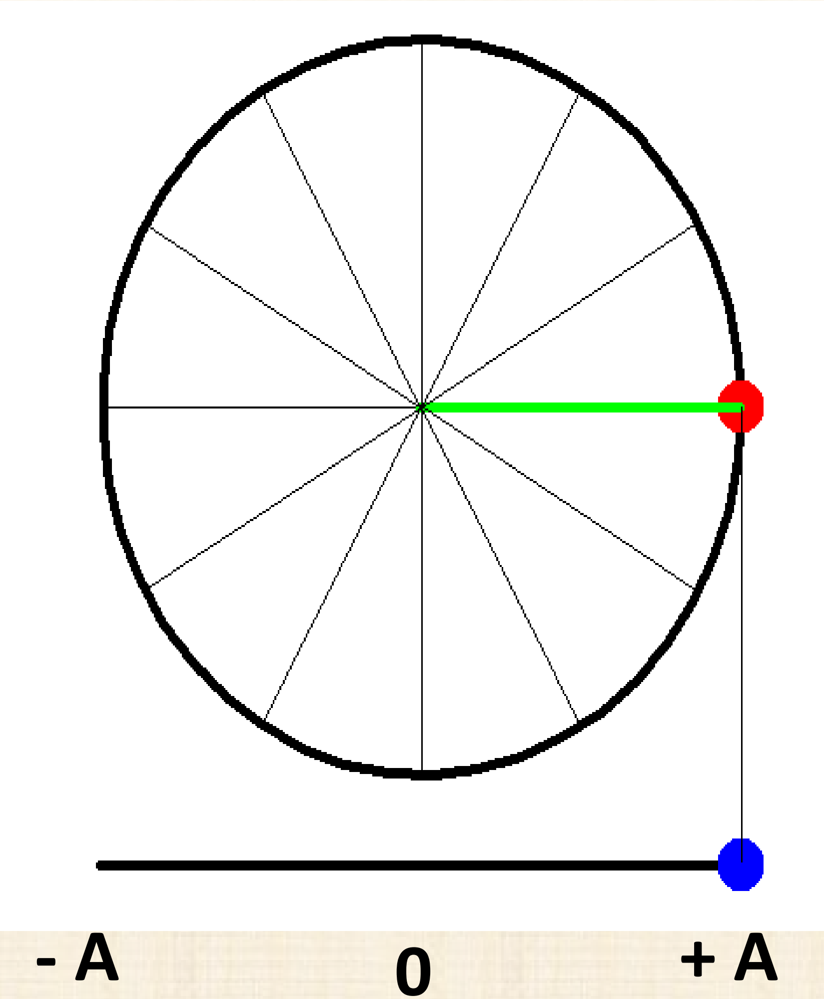
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_o)}$$

$$\boxed{y = Asen(\omega t + \varphi_o)}$$

La posición del punto P que se mueve en sentido antihorario a lo largo de la circunferencia con un mcu tendrá un vector de posición $\vec{r}$

Vamos a obtener las ecuaciones del MVAS a partir del MCU, proyectando este movimiento circular sobre el eje x.





Si se proyecta el movimiento de P sobre el eje x se observa que la proyección describe un movimiento rectilíneo entre los puntos – A y + A, con la misma frecuencia que el mcu

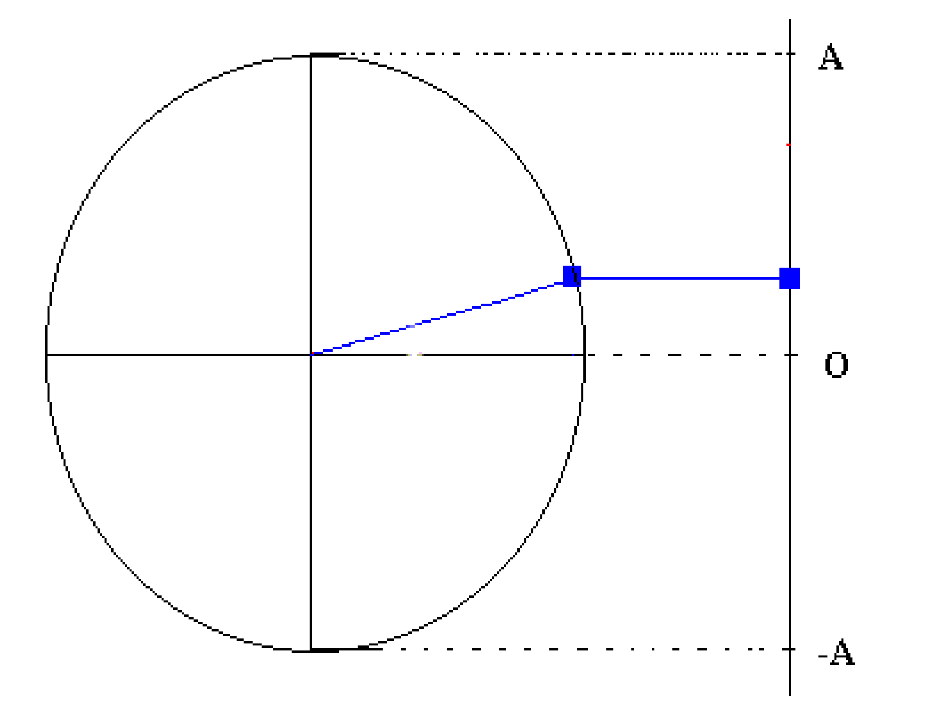
El vector de posición de la proyección en cada momento será:

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_o)}$$

En esta expresión

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_o)}$$

- **x es la elongación**. La distancia en cada momento al punto central O
- **A es la amplitud** o elongación máxima del movimiento, es decir, los límites a ambos lados de la posición central.
- **ω** no es una velocidad angular, sino una nueva magnitud llamada **pulsación o frecuencia angular**.
- **($\omega t + \varphi_o$)** se le llama **fase**, y da una idea de la situación de la partícula en un ciclo completo.
- **φ_o** se le llama **desfase inicial**, que da una idea de la situación de la proyección cuando empezó a contar el tiempo t, para t = 0



Si en lugar de proyectar sobre el eje x, proyectamos el mcu sobre el eje y, también obtenemos un mvas, cuya expresión será:

$$y = Asen(\omega t + \varphi_o)$$

La posición de una partícula que se mueve según un movimiento vibratorio armónico simple se puede expresar con cualquiera de las dos ecuaciones anteriores.

Mediante relaciones trigonométricas se pueden transformar entre sí las ecuaciones del MVAS

$$\cos\varphi = sen(\varphi + \frac{\pi}{2}) \qquad sen\varphi = \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$$

Por tanto la expresión de la posición de una partícula en el MVAS se puede expresar como

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_o)}$$

$$\boxed{x = Asen(\omega t + \varphi_o)}$$

La diferencia entre una y otra será el desfase inicial

CINEMÁTICA DEL MVAS: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

¡Recordamos!

En todo movimiento cinemático, la expresión de la velocidad la obtendremos a partir de la derivada de la posición, y la expresión para la aceleración será la derivada de la velocidad.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

La ecuación de la velocidad la podemos obtener derivando la expresión de la posición

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \varphi_o)] = -A\omega sen(\omega t + \varphi_o)$$

La velocidad se anula en los extremos de la trayectoria, y será máxima en el punto central de la misma.

El valor de la velocidad máxima será:

$$v_{máx} = \omega A$$

Podemos obtener una expresión de la velocidad en función de la posición.

Como

$$sen^2(\omega t+\varphi_0)+\cos^2(\omega t+\varphi_0)=1$$

$$sen(\omega t+\varphi_0)=\sqrt{1-\cos^2(\omega t+\varphi_0)}$$

Como $\cos(\omega t+\varphi_0)=\frac{x}{A}$ obtendremos

$$sen(\omega t+\varphi_0)=\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}=\sqrt{\frac{A^2-x^2}{A^2}}=\frac{1}{A}\sqrt{A^2-x^2}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad

$$v = -A\omega sen(\omega t + \varphi_o)$$

obtendremos

$$v = -A\omega \frac{1}{A}\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Cuando en esta ecuación la partícula se sitúa en el punto de equilibrio x = 0, se obtiene la expresión de la velocidad máxima.

Aceleración

La ecuación de la aceleración del mvas se obtiene derivando la ecuación de la velocidad respecto al tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[-A\omega sen(\omega t + \varphi_0)] = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_o)$$

Si comparamos esta ecuación con la de la posición, como

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_o)$$

Obtenemos la expresión $a = -\omega^2 x$

Esta es la condición necesaria y suficiente para que un movimiento sea armónico simple.

De la expresión de la aceleración, deducimos:

- El vector aceleración tiene siempre sentido contrario al vector de posición.

- La aceleración máxima será

$$a_{máx} = \omega^2 A$$

Esta aceleración máxima se da en los extremos de la trayectoria, con x = A

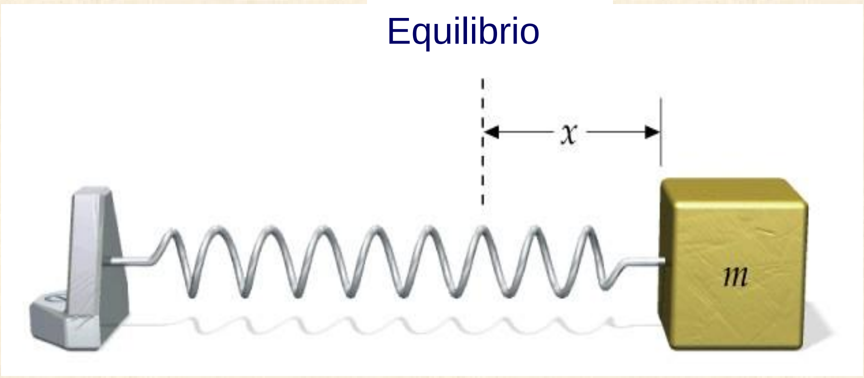
- En el punto central de la trayectoria, con x = 0, la aceleración será cero.

DINÁMICA DEL MVAS: OSCILADOR ARMÓNICO

Según la ley de Hooke, la fuerza que deforma un sistema elástico es proporcional a la deformación causada. Cuando para la fuerza exterior, las fuerzas del sistema recuperan la forma inicial ejerciendo una fuerza recuperadora, igual y de sentido contrario a la fuerza deformadora

$$\mathbf{F = -k \cdot x}$$

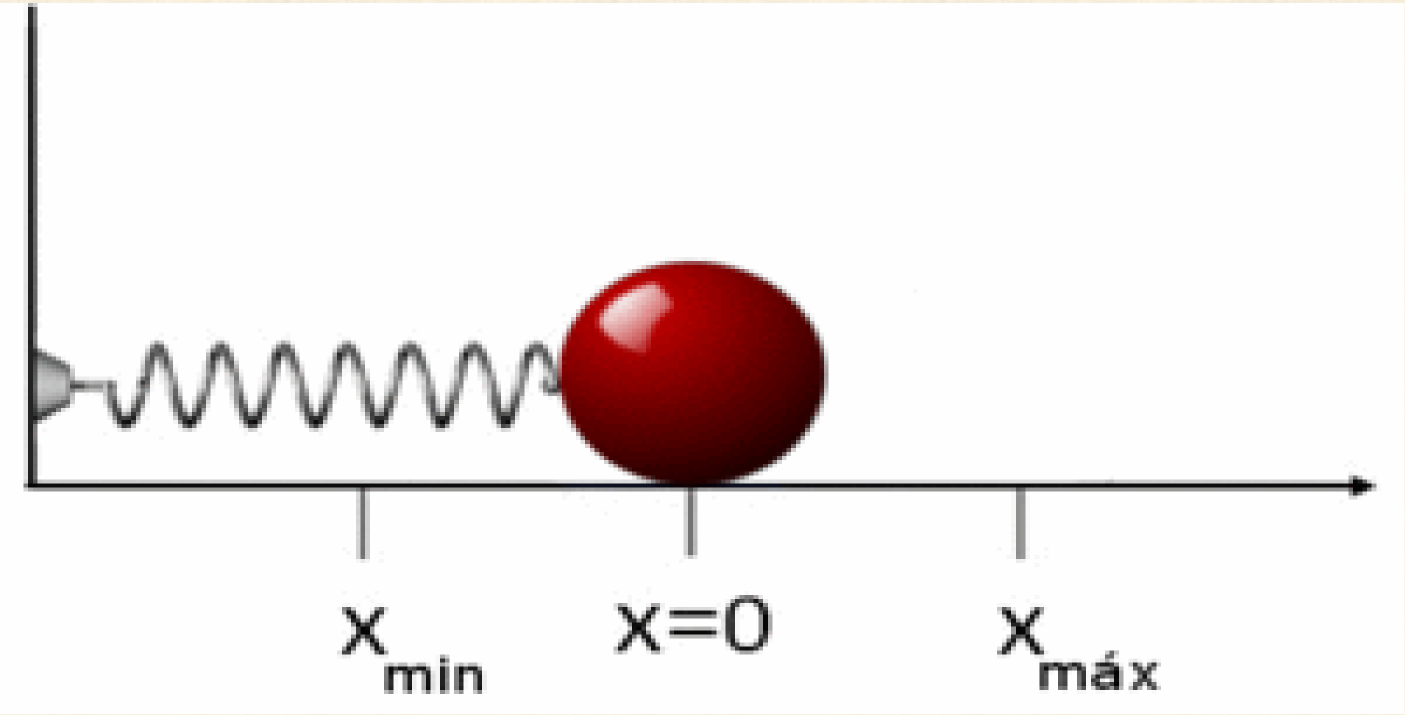
En la que k es la constante elástica del muelle.



Un oscilador armónico ideal está formado por una masa m unida a un muelle de masa despreciable y constante elástica k

La masa puede desplazarse sin rozamiento sobre una superficie horizontal.
Si se desplaza la masa desde la posición de equilibrio hasta una distancia x y luego se suelta, aparece sobre ella una fuerza recuperadora F que hace que la masa acelere en sentido contrario a la deformación inicial.

OSCILADOR ARMÓNICO



La aceleración que produce será:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} = -\frac{k}{m}x$$

Como $$a = -\omega^2 x$$

Comparando e identificando términos, obtenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La masa irá acelerando con aceleración decreciente hasta llegar a la posición de equilibrio (x=0; a=0).

Por la inercia sobrepasa este punto y comienza a comprimir el muelle, que se opone con una fuerza creciente, frenando la masa hasta que se detiene a una distancia igual que la inicial, pero al otro lado del punto de equilibrio.

Ahora la fuerza recuperadora empuja la masa hasta la posición de equilibrio, sobrepasándola y deteniéndose de nuevo en el extremo de la trayectoria e iniciando un nuevo ciclo.

El movimiento de un oscilador armónico constituye un MVAS de pulsación igual a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

El periodo de la oscilación de este movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

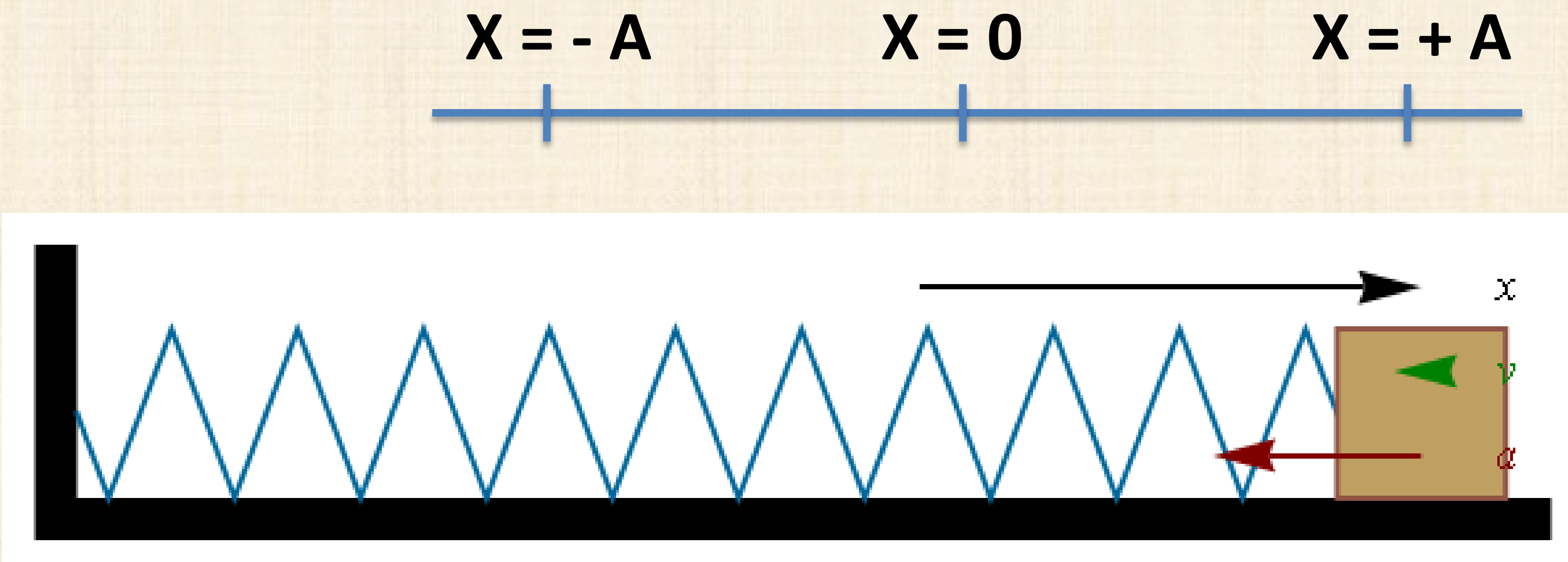
La frecuencia de la oscilación de este movimiento será

$$\nu = 1/T$$

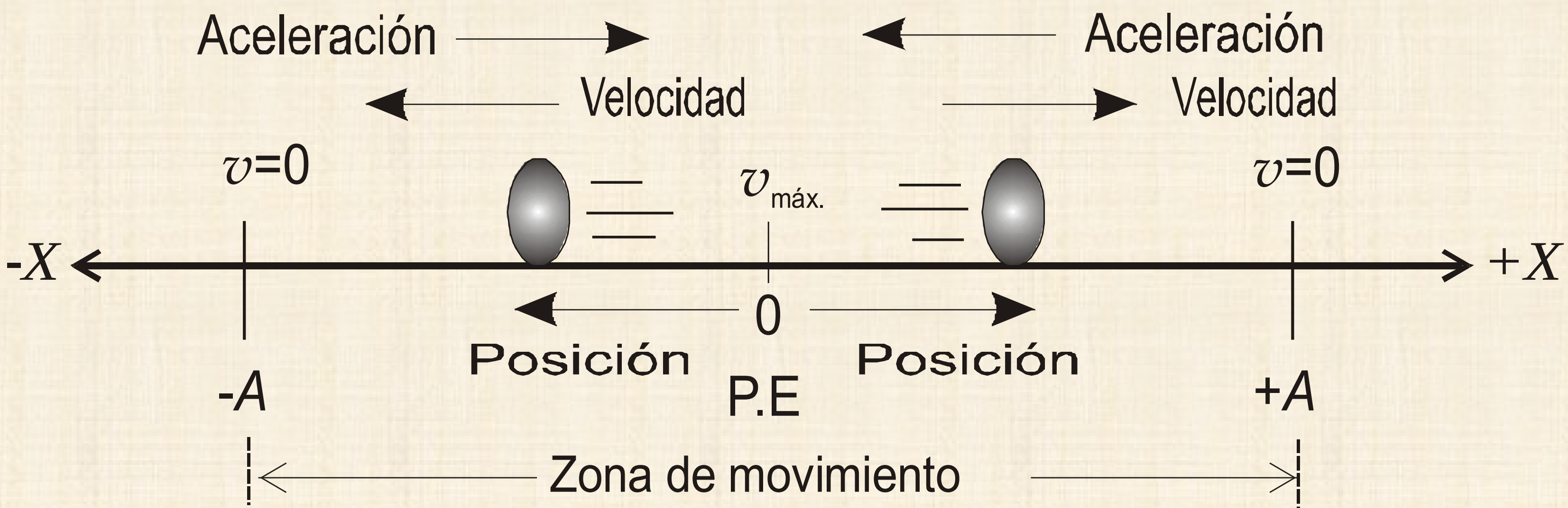
$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Vemos pues, que el periodo de oscilación y la frecuencia no dependen de la amplitud del movimiento, sino solamente de la masa y de las características elásticas del muelle.

Dirección y sentido de la velocidad y la aceleración en un oscilador armónico.



Dirección y sentido de la velocidad y la aceleración en un oscilador armónico.



ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

Energía potencial de un mvas

Las fuerzas elásticas son fuerzas centrales, siempre están dirigidas al punto central del mvas y sólo dependen de la distancia al mismo.
Por tanto el campo de fuerzas recuperadoras es un campo conservativo y cumple

$$W = -\Delta E_p$$

Por otro lado, el trabajo de las fuerzas elásticas entre dos puntos de la trayectoria es

$$W_{P\rightarrow O} = \int_P^O \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_P^O -kx\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_P^O$$

Por tanto:

$$\left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_P^O = Ep_P - Ep_O = -\Delta Ep$$

Si establecemos que la energía potencial en el punto central es cero, tendremos Ep(O) = 0 para Xo = 0, y la energía potencial del sistema en el punto P será:

$$Ep_P - \ 0 = \frac{1}{2}kx^2$$

Definimos energía potencial elástica en un punto P de la trayectoria de un mvas como el trabajo realizado contra las fuerzas recuperadoras para llevar la partícula desde el punto central hasta el punto P

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía cinética de un mvas

$$Ec = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \underbrace{\omega^2 A^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}_{v^2} = \tfrac{1}{2} m \omega^2 A^2 \left[1 - \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right]$$

$$Ec = \tfrac{1}{2} m \omega^2 \left[A^2 - A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right]$$

como $\quad x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\boxed{Ec = \tfrac{1}{2} m \omega^2 \left[A^2 - x^2\right] = \tfrac{1}{2} k \left[A^2 - x^2\right]}$$

Podemos por tanto expresar la energía cinética en función de la posición de la partícula.

Si x = 0 el valor de la energía cinética es el máximo posible, en el centro de la oscilación es donde la partícula lleva la máxima velocidad.

Si x = $\pm$ A en los extremos, la velocidad es nula y por tanto la energía cinética es cero.

$$Ec_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Conservación de la energía mecánica de un mvas

Como el campo de fuerzas recuperadoras es conservativo, se tiene que cumplir el principio de conservación de la energía mecánica.

La energía mecánica es la suma de la cinética y la potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

En los extremos, con x = A

En este caso tenemos en cuenta que el movimiento se detiene, por tanto la energía cinética es nula y la potencial es máxima.

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

En el punto central, con x = 0

En este caso el oscilador se encuentra en el punto de equilibrio y su energía potencial es cero, y la cinética es máxima.

$$E_m = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

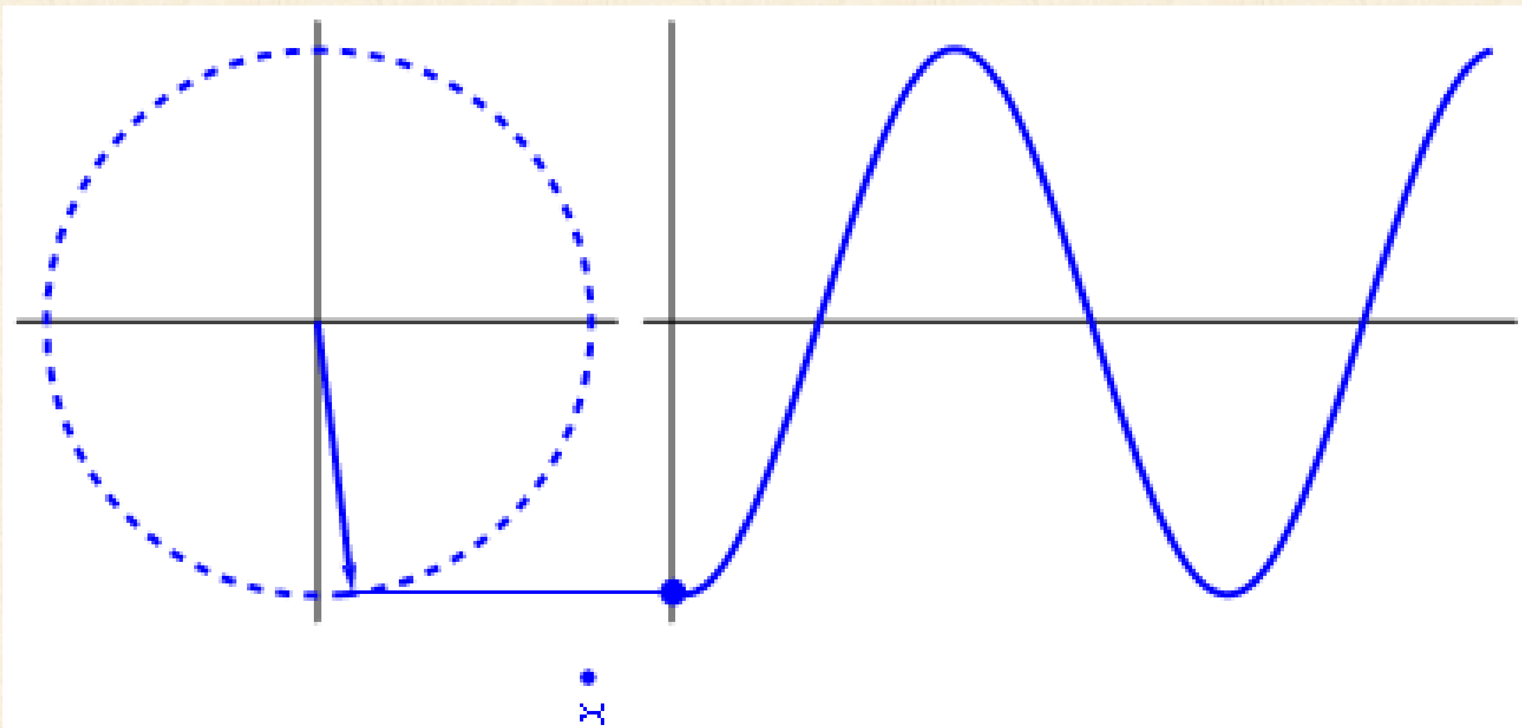
En cualquier punto de la trayectoria

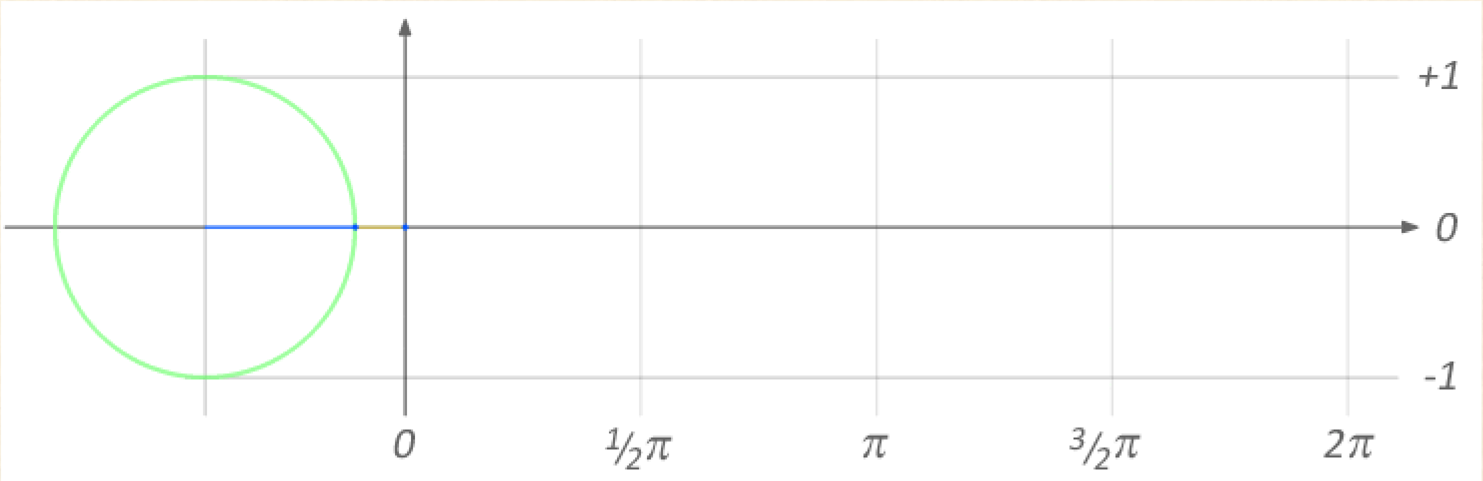
$$E = Ec + Ep = \tfrac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - x^2\right) + \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \tfrac{1}{2} kA^2}$$

La energía mecánica, suma de energía potencial elástica y cinética, en un oscilador armónico es constante, como corresponde a un sistema conservativo.

Generación de un Movimiento Ondulatorio a partir de un Movimiento Armónico Simple




+1
0
-1
0
½π
π
³⁄₂π
2π

$y = \cos(\theta)$